Esercizio 1 Si consideri un campione casuale di n osservazioni da una popolazione X con funzione di massa di probabilità

$$f_X(x;\theta) = \theta(1-\theta)^{x-1} \qquad x = 1, 2, \dots, \quad \theta \in (0,1)$$

In corrispondenza di un generico campione $(x_1, \dots, x_n)$,

a) scrivere la funzione di verosimiglianza, L, del parametro θ;

b) determinare la stima di massima verosimiglianza di θ;

c) avendo osservato il seguente campione

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 5, \quad , x_3 = 1, \quad x_4 = 2, \quad x_5 = 4$$

stimare la probabilità che la v.a. X assuma valori maggiori di 3.

Esercizio 2 Sia $X_1, \dots, X_n$ un campione casuale generato dalla popolazione X con funzione di densità

$$f_X(x;\theta) = \frac{1}{\theta^2} x \exp\left\{-\frac{x}{\theta}\right\} \qquad x > 0, \quad \theta > 0.$$

a) Scrivere la funzione di verosimiglianza;

b) determinare lo stimatore di massima verosimiglianza di θ.

Esercizio 3 Sia $X_1, \dots, X_n$ un campione casuale dalla popolazione X con funzione di densità

$$f_X(x;\theta) = 2\theta e^{-2\theta x} \qquad x > 0, \quad \theta > 0.$$

a) Scrivere la funzione di verosimiglianza;

b) determinare lo stimatore di massima verosimiglianza.

c) Dato un campione di dimensione $n = 150$ in cui si è osservata una media campionaria $\bar{x} = 10$, determinare la stima di massima verosimiglianza per θ e per $\gamma = 2/\theta$.

Esercizio 4 Sia $X_1, \dots, X_n$ un campione casuale dalla popolazione Uniforme nell'intervallo $[-\theta, 1]$, con $\theta > 0$.

a) Scrivere la funzione di verosimiglianza;

b) determinare lo stimatore di massima verosimiglianza. Valutarne la distorsione e l'errore quadratico medio.

c) Determinare lo stimatore dei momenti (ottenuto uguagliando il valore atteso $E(X)$ alla media campionaria $\bar{X}$. Studiarne distorsione ed errore quadratico medio.

Esercizio 5 Siano $\bar{X}_1$ e $\bar{X}_2$ le medie campionarie di due campioni di dimensioni n_1 e n_2 entrambi provenienti dalla stessa popolazione normale con media μ e varianza σ^2. Si consideri lo stimatore

$$T = \frac{1}{3}\bar{X}_1 + \frac{2}{3}\bar{X}_2$$

a) Verificare se lo stimatore è distorto.

b) Valutare l'errore quadratico medio di T.

Esercizio 6 Siano T_1 e T_2 due stimatori non distorti di un parametro θ che hanno la stessa varianza $V(T_1) = V(T_2) = \sigma^2$. Non c'è quindi nessun motivo per preferire T_1 a T_2 o viceversa. Si consideri ora il terzo stimatore

$$T = \frac{T_1 + T_2}{2}.$$

a) Verificare che T è non distorto.

b) È possibile determinare l'errore quadratico medio di T in funzione della varianza σ^2 di T_1 e T_2 oppure manca qualche informazione rilevante?

c) Osservando l'errore quadratico medio di T in rapporto a quello di T_1, si può concludere che T è preferibile?

Attenzione: T_1 e T_2 potrebbero essere correlati.